Génie Mécanique, 5ème Semestre

EXAMEN FINAL – MÉCANIQUE VIBRATOIRE

AUTOMNE 2022-2023

DURÉE :2H30MIN

Instructions :

Ne pas retourner cette page avant d'y être autorisé

Avant l'examen

- Placez votre carte d'étudiant CAMIPRO devant vous sur la table.
- Les téléphones portables doivent être éteints et placés dans vos sacs.
- Préparez votre espace de travail. Matériel autorisé :
  - Stylos bleus et/ou noirs, **les stylos rouge et vert sont réservés pour la correction.**
  - Les crayons sont autorisés uniquement pour les dessins.
  - Une calculatrice est autorisée.

Pendant l'examen

- Écrivez et dessinez avec soin. Ce qui est illisible ne sera pas corrigé.
- Des feuilles de papier supplémentaires sont disponibles auprès des assistants.
  - Prenez soin de numéroter et d'indiquer votre nom sur toutes les feuilles de réponse.
- Levez la main si vous avez une question ou si vous souhaitez aller aux toilettes.
- Lors des 15 dernières minutes de l'examen, il est interdit de quitter la salle.
- Lorsque l'examen est terminé, **posez votre stylo**, et restez assis et silencieux jusqu'à ce que nous ayons ramassé TOUTES les copies.

Contenu de l'examen

- Question 1 – 30 points
  - *Page 1*
- Question 2 – 15 points
  - *Page 2*
- Question 3 – 10 points
  - *Page 2*
- Question 4 – 45 points
  - *Page 3*

QUESTION 1 (20 points)

Le système de la Figure 1.1 est une poutre de section A et moment d'inertie I, longueur L, module de Young E, et masse volumique ρ. La poutre a un appui simple à gauche et est guidée à droite. On est intéressé par les *vibrations de flexion* dans cette barre.

i) Écrire l'équation différentielle qui décrit le mouvement de la barre. .... (2 pts)
ii) Écrire les conditions de bord du système. .... (4 pts)
iii) Combien des modes normaux peut-on trouver pour cette poutre ? .... (2 pts)
iv) Écrire les modes et fréquences propres. .... (12 pts)

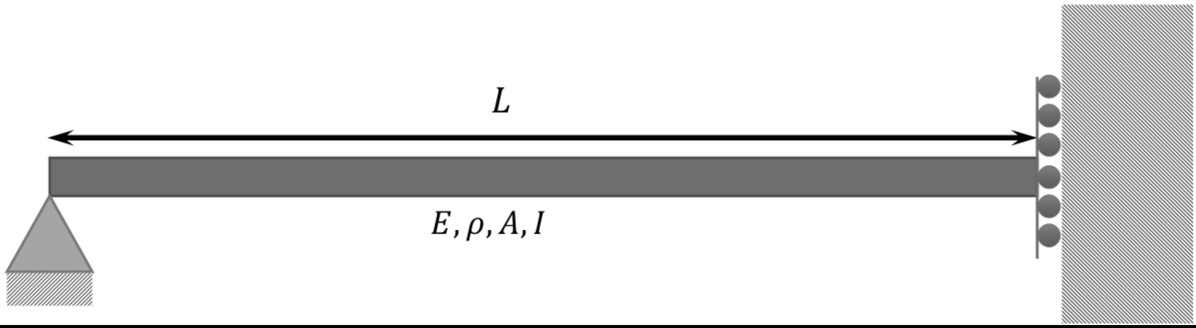

Figure 1.1 | Schéma du système, avec la poutre dans laquelle on étudie les vibrations de flexion. Sur la gauche, la poutre est en appui simple, sur la droite elle est guidée.

Solution

i) Du formulaire : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$

ii) $\begin{Bmatrix} y(x=0,t) = y''(x=0,t) = 0 \\ y'(x=L,t) = y'''(x=L,t) = 0 \end{Bmatrix}$

iii) On peut trouver ∞.

iv)

$$y_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right) + C_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right) + D_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right)\right)\cos(\omega_n t)$$

$$\left.\begin{aligned} y(x=0,t) &= A_n + C_n = 0 \\ y''(x=0,t) &= \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 (A_n - C_n) = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow A_n = C_n = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y'(x=L,t) &= \frac{\alpha_n}{L}(B_n\cos(\alpha_n) + D_n\cosh(\alpha_n)) = 0 \\ y'''(x=L,t) &= \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^3 (B_n\cos(\alpha_n) - D_n\cosh(\alpha_n)) = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow D_n = 0;\ \cos(\alpha_n) = 0$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$y_n(x,t) = B_n \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\frac{x}{L}\right)\cos(\omega_n t)$$

$$\omega_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^4 \frac{EI}{\rho A}$$

QUESTION 2 (33 points)

On a un système résonant conservatif dont on connait :

- trois vecteurs propres : $\vec{\beta}_I = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{\beta}_{III} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$,
- la matrice noyau en coordonnées modales : $\Delta = \frac{k}{m}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$,
- la matrice de masse en coordonnées réelles : $M = m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,
- les conditions initiales : $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ cm; $\overrightarrow{\dot{x}_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

i) Combien de masses a-t-on dans le système? .... (2 pts)
ii) Écrire les pulsations propres du système.. (3 pts)
iii) Pour chaque mode, écrire la masse et la raideur effectives. .... (6 pts)
iv) Écrire le mouvement des modes par rapport au temps. .... (12 pts)
v) Écrire le mouvement des masses par rapport au temps.. (6 pts)
vi) Trouver des conditions initiales pour avoir de mouvement seulement à $\omega_{II,0}$?........ (4 pts)

Solution

i) On a 3DdL, alors 3 masses dans le système.

ii) De la matrice Δ on obtient directement : $\omega_I = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$; $\omega_{II} = 2\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}$; $\omega_{III} = 3\sqrt{\frac{k}{m}}$.

iii) Mode 1 : $m_I = \vec{\beta}_I^T M \vec{\beta}_I = 4m$; $k_I = \omega_I^2 m_I = 4k$
Mode 2 : $m_{II} = \vec{\beta}_{II}^T M \vec{\beta}_{II} = 6m$; $k_{II} = \omega_{II}^2 m_{II} = 24k$
Mode 3 : $m_{III} = \vec{\beta}_{III}^T M \vec{\beta}_{III} = 12m$; $k_{III} = \omega_{III}^2 m_{III} = 108k$

iv) On commence par mettre les conditions initiales en base modale :

$$\overrightarrow{\dot{x}_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \to \overrightarrow{\dot{q}_0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Pour la position on peut utiliser plusieurs options :

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix}0\\1\text{cm}\\0\end{pmatrix} \to \overrightarrow{x_0} = q_{0,I}\vec{\beta}_I + q_{0,II}\vec{\beta}_{II} + q_{0,III}\vec{\beta}_{III} \to \overrightarrow{q_0} = \begin{pmatrix}1/2\\1/3\\1/6\end{pmatrix}\text{cm}$$

$$\overrightarrow{x_0} = B \cdot \overrightarrow{q_0} \to B^T M \overrightarrow{x_0} = B^T M B \cdot \overrightarrow{q_0} = M^0 \cdot \overrightarrow{q_0} \to \overrightarrow{q_0} = {M^0}^{-1} B^T M \overrightarrow{x_0}$$

Avec les C.I. on peut écrire :

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix}1/2\cos(\omega_I t)\\1/3\cos(\omega_{II} t)\\1/6\cos(\omega_{II} t)\end{pmatrix}\text{cm}$$

v) $\vec{x}(t) = B \cdot \vec{q}(t) = \left(1/2\cos(\omega_I t)\,\vec{\beta}_I + 1/3\cos(\omega_{II} t)\,\vec{\beta}_{II} + 1/6\cos(\omega_{II} t)\,\vec{\beta}_{III}\right)$ cm

vi) Avec des C.I. qui soient proportionnelles à $\vec{\beta}_{II}$.

QUESTION 3 (17 points)

Dans le même système de la question précédente on introduit un amortissement, de tel manière que le système est sous-amorti avec une matrice de dissipation en coordonnées réelles : $C = c\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. On applique aussi une force harmonique $|\vec{F}(t)| = F^* \cos(\omega t)$ sur une des masses tel que l'amplitude du mouvement en régime permanent de la masse au milieu vient donnée par la Figure 3.1. Le système a $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\ \frac{\text{rd}}{\text{s}}, c = \frac{1}{24}\frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

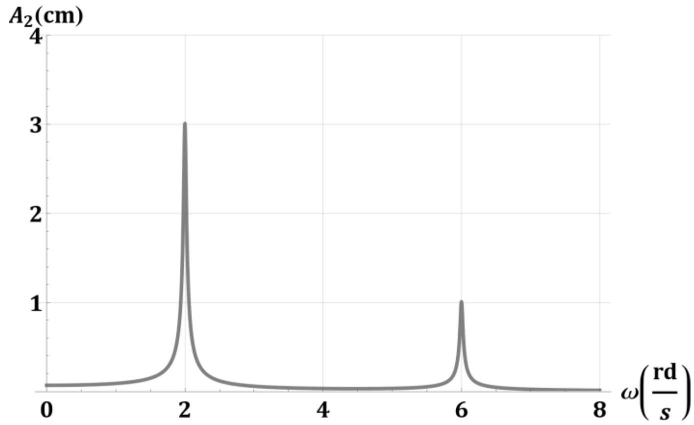

Figure 3.1 | Amplitude de la deuxième masse en fonction de la fréquence de la force appliquée.

vii) Est-ce que les vecteurs propres sont les mêmes qu'avant ? Pour quoi ?................ (3 pts)
viii) Pour chaque mode, écrire l'amortissement effectif. .... (3 pts)
ix) Pour quoi trouve-t-on seulement 2 maximums à la réponse (et pas 3) ?.............. (3 pts)
x) En conséquence, écrire le vecteur de force $\vec{F}(t)$ en coordonnées réelles.............. (5 pts)
xi) Est-ce que la 2ème masse bouge dans ce cas ?.. (3 pts)

Solution

i) Oui les vecteurs propres seront les mêmes parce que le système est Caughey, car $C = \frac{c}{m}M$.

ii) Mode 1 : $c_I = \vec{\beta}_I^T C \vec{\beta}_I = 4c$
Mode 2 : $c_{II} = \vec{\beta}_{II}^T C \vec{\beta}_{II} = 6c$
Mode 3 : $c_{III} = \vec{\beta}_{III}^T C \vec{\beta}_{III} = 12c$

iii) Parce que le deuxième mode, ceci avec $\omega_{II} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} = 4\frac{\text{rd}}{\text{s}}$ n'est pas excité, c'est-à-dire que la force modale prend la forme : $\overrightarrow{F^0} = \begin{pmatrix}F_I\\ 0\\ F_{III}\end{pmatrix}$.

iv) Comme $\overrightarrow{F^0} = B^T \cdot \vec{F}$, pour avoir la 2ème composante zéro : $\vec{\beta}_{II}^T \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ F\end{pmatrix}$.

v) La 2ème masse bougera car elle fait parti des autres modes et, comme on peut regarder dans la figure, elle bougera pour n'importe quelle fréquence.

QUESTION 4 (30 points)

J'ai pris mon *Segway* pour venir à l'examen. Des travaux ont eu lieu sur la rue, laissant un profil sinusoïdal sur la chaussée. La vitesse en direction horizontale était constante, v. Le système est sous-amorti et peut être approximé par le schéma de la Figure 4.1. Pour le problème, on considère le régime permanent, que les conditions initiales sont nulles et que la gravité est négligeable.

i) Combien de DdL a le système ? .... **(2 pts)**
ii) Écrire la fonction du déplacement vertical de la masse m_{roue}, $y(t)$. .... **(3 pts)**
iii) Écrire les énergies potentielles et cinétiques du système. .... **(8 pts)**
iv) Écrire les équations de mouvement pour le système .... **(4 pts)**
v) Écrire les matrices M, K, C en coordonnées réelles. .... **(3 pts)**
vi) Calculer les fréquences propres du système. .... **(4 pts)**
vii) Calculer les vecteurs propres du système. .... **(4 pts)**
viii) Calculer le déplacement modal pour le 2ème mode $q_{II}(t)$. .... **(2 pts)**

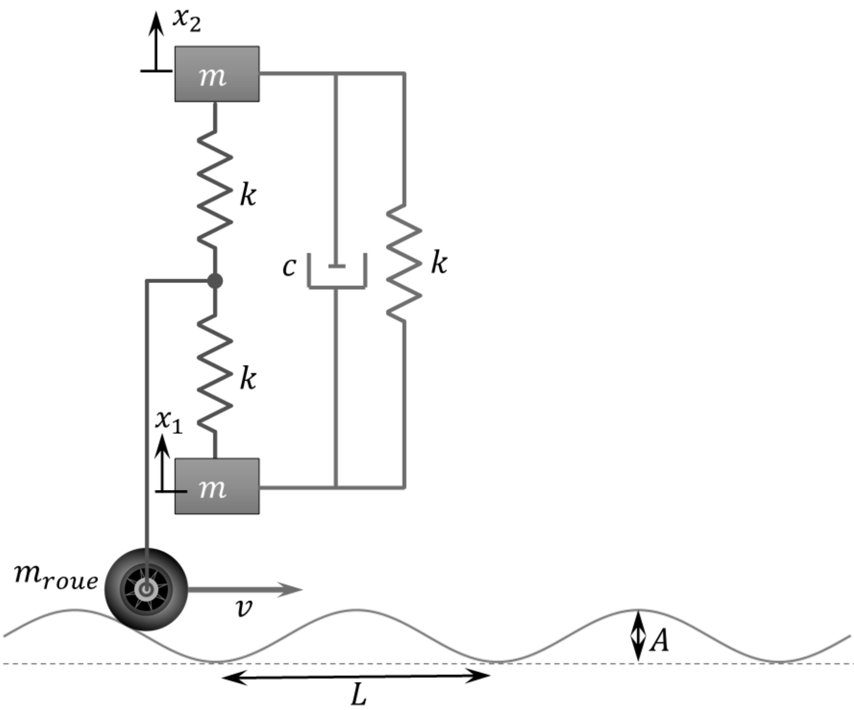

Figure 4.1| Schéma du *Segway* sous-amorti avec 2 masses suspendues.

Solution

i) 2 DdL

ii) $y(t) = \frac{A}{2}\sin\left(2\pi\frac{vt}{L}\right)$

iii) $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2; V = \frac{1}{2}k(x_1 - y)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - y)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2; W = \frac{1}{2}c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$

iv) $\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 - c\dot{x}_2 + 2kx_1 - kx_2 = ky \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 - c\dot{x}_1 + 2kx_2 - kx_1 = ky \end{cases}$

v) $M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m\mathbb{I}; K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; C = c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

vi) $\det(M^{-1}K - \omega_n^2\mathbb{I}) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda)^2 - 1 \rightarrow \begin{cases} \lambda_I = 1 \rightarrow \omega_I^2 = \frac{k}{m} \\ \lambda_{II} = 3 \rightarrow \omega_{II}^2 = 3\frac{k}{m} \end{cases}$

vii) $$\begin{cases} \lambda_I = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ -1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\beta}_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_{II} = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a \\ -1+2a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \vec{\beta}_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

viii) Des équations de mouvement on peut écrire un vecteur de force : $\vec{F} = \begin{pmatrix} ky \\ ky \end{pmatrix}$. Quand on passe à base modale : $\overrightarrow{F^0} = B^T\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ky \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ky \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est-à-dire qu'il n'y a pas de force sur le 2ème mode, alors le 2ème mode ne bougera pas.